En esta parte nos interesa determinar

$$\underline{Y} = g(\underline{X}) \sim ¿?$$

en donde se conoce $f_{\underline{X}}(x)$ y g es una función monótona y $g^{-1}(y)$ tiene una derivada continua en $V_{\underline{Y}}$

$$V_{\underline{X}} = \{x : f_{\underline{X}}(x) > 0\} \quad y \quad V_{\underline{Y}} = \{y : g(x) \text{ para algun } x \in V_{\underline{X}}\}$$

$\Rightarrow$

$$F_{\underline{Y}}(y) = P(\underline{Y} \leq y)$$

$$= P(g(\underline{X}) \leq y) = \begin{cases} F_{\underline{X}}(g^{-1}(y)), & \text{si } g \text{ es creciente} \\ 1 - F_{\underline{X}}(g^{-1}(y)), & \text{si } g \text{ es decreciente} \end{cases}$$

Por lo que

$$f_{\underline{Y}}(y) = f_{\underline{X}}(g^{-1}(y))\, |J| \,, \quad \text{en donde } J = \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \quad (*)$$

La clase pasada vimos algunos ejemplos sin requerir el teorema como tal, pero en este caso buscamos generalizarlo a vectores aleatorios

Si (X_1, X_2) es un vector bivariado con distribución continua $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ y

$$Y_1 = g_1(X_1, X_2)$$
$$Y_2 = g_2(X_1, X_2)$$

queremos expresar $f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$ mediante un resultado análogo a $(*)$

En este caso $V_{X_1,X_2} = \{(x_1,x_2) : f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) > 0\}$

y $V_{Y_1,Y_2} = \{(y_1,y_2) : y_1 = g_1(x_1,x_2) \text{ y } y_2 = g_2(x_1,x_2) \text{ para algún } (x_1,x_2) \in V_{X_1,X_2}\}$

En el caso más sencillo se asume que es posible obtener una transformación inversa

$$x_1 = h_1(y_1,y_2)$$
$$x_2 = h_2(y_1,y_2)$$

y en donde su jacobiano exista

$$J = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} \frac{d}{dy_1} h_1(y_1,y_2) & \frac{d}{dy_2} h_1(y_1,y_2) \\ \frac{d}{dy_1} h_2(y_1,y_2) & \frac{d}{dy_2} h_2(y_1,y_2) \end{pmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$ en V_{Y_1,Y_2} definimos

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}(h_1(y_1,y_2), h_2(y_1,y_2)) \, |J|$$

Lo mas complicado es encontrar V_{Y_1,Y_2} así como la inversa de la transformación.

Gamma, beta y distribución Dirichlet

Sean $X_1 \perp X_2$, en donde

$$X_1 \sim Gamma(\alpha_1, \beta) \quad y \quad X_2 \sim Gamma(\alpha_2, \beta)$$

$$f_{X_j}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)} \beta^{\alpha_j} x^{\alpha_j - 1} e^{-\beta x}, \quad j = 1, 2$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \beta^{\alpha_1} x^{\alpha_1 - 1} e^{-\beta x}\right]\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \beta^{\alpha_2} x^{\alpha_2 - 1} e^{-\beta x}\right]$$

y nos interesa

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2} \qquad Y_2 = X_1 + X_2 \sim Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$$

¿Como le hacemos?

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{x_1+x_2} \\ y_2 = g_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = h_1(y_1, y_2) = y_1 y_2 \\ x_2 = h_2(y_1, y_2) = y_2 - y_1 y_2 \end{array}$$

$$\underline{V_{Y_1, Y_2} = (0,1) \times (0, \infty)}$$

$$J = \left| \begin{pmatrix} y_2 & y_1 \\ -y_2 & 1-y_1 \end{pmatrix} \right| = y_2(1-y_1) + y_1 y_2$$

$$= y_2 - \cancel{y_1 y_2} + \cancel{y_1 y_2}$$

$$J = y_2$$

Así

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1, X_2}(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2)) \, |J|$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \beta^{\alpha_1} (y_1 y_2)^{\alpha_1 - 1} e^{-\beta y_1 y_2}$$

$$\times \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \beta^{\alpha_2} [y_2(1-y_1)]^{\alpha_2 - 1} e^{-\beta y_2 (1-y_1)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} y_1^{\alpha_1 - 1} (1-y_1)^{\alpha_2 - 1}$$

$$\times y_2^{\alpha_1 + \alpha_2 - 2} \beta^{\alpha_1 + \alpha_2} e^{-\beta y^2} \quad y_2$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} y_1^{\alpha_1-1}(1-y_1)^{\alpha_2-1}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} y_2^{\alpha_1+\alpha_2-1} \beta^{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\beta y_2}$$

$$= f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2}(y_2)$$

$Y_1 \sim \text{Beta}(\alpha_1, \alpha_2)$ con $Y \in (0,1)$

Distribución Dirichlet

Sean $X_1, X_2, \dots, X_K$ independientes, con

$$X_j \sim \text{Gamma}(\alpha_j, 1)$$

definiendo

$$Y_j = \frac{X_j}{\sum_{i=1}^{K} X_i}, \quad j=1,2,\dots,K$$

Claramente $\sum_{j=1}^{K} Y_j = 1$

$\Rightarrow \quad (Y_1, Y_2, \dots, Y_K) \sim \text{Dirichlet}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K)$

y además $\quad Y_j \sim \text{Beta}(\alpha_j, \sum_{i \neq j} \alpha_i)$

$\boxed{\text{Distribución normal bivariada}}$

Sea $Z_1 \sim N(0,1)$ y $Z_2 \sim N(0,1)$ con $Z_1 \perp Z_2$,

si $\quad Y_1 = \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}\, Z_2$, con $-1 \leq \rho \leq 1$

$Y_2 = Z_1$

$$f_{Z_1,Z_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-z_1^2/2} e^{-z_2^2/2}$$

$$z_1 = h_1(y_1, y_2) = y_2$$

$$z_2 = h_2(y_1, y_2) = \frac{y_1 - \rho y_2}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} & -\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \end{pmatrix}$$

$$|J| = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-y_2^2/2} e^{-(y_1-\rho y_2)^2/2(1-\rho^2)} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y_1^2-2\rho y_1 y_2+y_2^2)}$$

Un poco de simulación estocástica y trasformaciones

Invirtiendo la función de distribución acumulada

Sea X una v.a. y $F_X(x)$ su distribución acumulada.
Si $F_X(x)$ es continua y estrictamente creciente
$\Rightarrow$ F_X^{-1} existe

Sea $U \sim U(0,1)$

$$Y = F_X^{-1}(U) \sim ¿?$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F_X^{-1}(U) \leq y)$$
$$= P(U \leq F_X(y))$$
$$= F_X(y)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_Y(y) = F_X(y)}}$$

¿Qué me dice lo anterior?

1 – Necesito generar realizaciones de la v.a. X
2 – Tengo $F_X(x)$ continua y estrictamente creciente

$$\Rightarrow F_X^{-1} \text{ existe}$$

3 $U \sim U(0,1)$
$\Rightarrow X = F_X^{-1}(U) \sim F_X$

Va a ir un ejemplo

$U \sim U(0,1)$

y $F_X(x) = 1 - e^{-\beta x}$, $X \sim Exp(\beta)$

$U = 1 - e^{-\beta x}$

$\Rightarrow \quad X = -1/\beta \log(0) \quad \perp$

Box-Muller para generar v.a. $N(\mu, \sigma^2)$

Si $Z \sim N(0,1) \Rightarrow X = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\Rightarrow$ para generar v.a. de una $N(\mu, \sigma^2)$ sólo es necesario generar de una $N(0,1)$

Si $Z \sim N(0,1)$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 z^2} \mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(z)$$

$$\Rightarrow F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

¡Un poco complicado!

"El truco" $\rightarrow$ ¡en lugar de generar una realización, generamos dos!

$Z_1 \sim N(0,1)$ y $Z_2 \sim N(0,1)$

con $Z_1 \perp Z_2$

$$\Rightarrow f_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(z_1^2+z_2^2)} \mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(z_1) \mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(z_2)$$

$$
\left.\begin{aligned} r &= g_1(z_1, z_2) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \\ \theta &= g_2(z_1, z_2) = \operatorname{atan2}(z_1, z_2) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} z_1 &= r\cos(\theta) \\ z_2 &= r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{aligned}
$$

$$
(r, \theta) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi)
$$

$$
|J| = \left| \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \right| = r\cos^2(\theta) + r\,\mathrm{sen}^2(\theta) = r
$$

$$
\Rightarrow f_{r,\theta}(r, \theta) = f_{z_1, z_2}(h_1(r,\theta), h_2(r,\theta))\, r
$$

$$
= r \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} r^2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(r) \mathbb{1}_{(0,2\pi)}(\theta)
$$

$$
= \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{(0,2\pi)}(\theta) \right]}_{\theta \sim U(0, 2\pi)} \underbrace{\left[r e^{-\frac{1}{2} r^2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(r) \right]}_{r \sim ¿?}
$$

$$
\begin{aligned} F_r(r) &= 1 - e^{-r^2/2} = U_1 \sim U(0,1) \\ F_\theta(\theta) &= \frac{1}{2\pi}\theta \quad\;\; = U_2 \sim U(0,1) \end{aligned} \qquad U_1 \perp U_2
$$

$$
\Rightarrow \begin{aligned} r &= \sqrt{-2\log(1 - U_1)} \\ \theta &= 2\pi U_2 \end{aligned}
$$

¿Y esto para que me sirve?

$$Z_1 = r\cos(\theta) \sim N(0,1)$$
$$Z_2 = r\,\mathrm{sen}(\theta) \sim N(0,1)$$

Box - Muller

$U_1 \sim U(0,1)$
$U_2 \sim U(0,1)$

$$\theta = 2\pi U_1$$
$$r = \sqrt{-2\log(U_2)}$$
$$Z_1 = r\cos(\theta)$$
$$Z_2 = r\,\mathrm{sen}(\theta)$$